PEDAGOGÍA 2005

UNESCO

IPLAC INSTITUTO PEDAGÓGICO LATINOAMERICANO Y CARIBEÑO

CURSO 93

Matemática Relacional

Dr. Joaquín Palacio Peña

Ciudad de La Habana, Cuba

Diseño y corrección:

MSc. Nelson Piñero Alonso

ISBN 959-18-0103-3

Título: **MATEMÁTICA RELACIONAL**

Autor: **Dr. Joaquín Palacio Peña**

Instituto Superior Pedagógico "José de la Luz y Caballero"

En el resumen de este trabajo aparece la expresión: La mayor complejidad de los problemas matemáticos no está dada por los contenidos que concurren en su resolución, sino en la búsqueda de las relaciones entre estos.

Si esto es así, y estamos convencidos que lo es, entonces una gran parte de nuestro trabajo en el aula tiene que estar dirigido a lograr que los alumnos sean capaces de buscar relaciones apropiadas y que una vez encontradas, sean capaces de aplicarlas a la resolución de problemas. Caben aquí dos inquietudes fundamentales, primero, a que edad debe empezarse la búsqueda de relaciones y segunda como hacerlo.

El resumen propuesto para el curso y el contenido que estamos proponiendo, dan respuesta a la primera pregunta, pues los conocimientos que se abordan son típicos de la enseñanza primaria, aunque incursionamos en la enseñanza Secundaria. Una revisión a los programas para primaria en cualquier sistema escolar, de cualquier parte del mundo, nos permiten comprobar que la vida escolar inicia la enseñanza de la Matemática con el concepto de número, contar y las operaciones fundamentales y ¿cómo podría lograrse este objetivo sino es a través de las búsqueda de relaciones?

Nuestro problema no radica en el inicio de la vida escolar, donde los recursos que se utilizan en la enseñanza de la Matemática tienen como base la búsqueda de relaciones, sino en los cursos escolares posteriores, donde este proceso de búsqueda de relaciones se va perdiendo y es sustituido por un proceso algorítmico, formal y poco motivante para los alumnos, que poco a poco van conduciendo el aprendizaje de la Matemática a memorizar definiciones, reglas, fórmulas, que se aplican porque hay una palabra o frase clave que dice que eso es lo que hay que hacer o por que aparecen cantidades sobre las cuales se sabe que hay que operar y sobre las cuales aplica la operación que parece más cómoda y no porque su acción esté precedida por un proceso de razonamiento que lo conduzca a la realización de las transformaciones necesarias para resolver el problema propuesto. Lo expuesto hasta aquí no es una regla general observada entre todos los docentes, pueden existir excepciones, pero consideramos que es un problema bastante generalizado que nos conduce a falsas evaluaciones de las habilidades matemáticas de nuestros alumnos, pues saber matemática no es saber realizar operaciones formales o aplicar definiciones, reglas o fórmulas para obtener resultados deseados, lo importante en matemática, es descubrir cuales son las definiciones, operaciones, reglas, fórmulas, etc.; cuales tienen y cuales no tienen relaciones con el problema propuesto y seleccionar correctamente las que deben aplicarse para resolver una situación dada.

I. Presencia de las relaciones en los conceptos, juicios, razonamientos y pensamiento.

El término relaciones es nuestra vía para conducir el proceso enseñanza aprendizaje de la Matemática y aparece calificando el tipo de Matemática que desarrollaremos en nuestro trabajo. Nos detendremos en su significado para la resolución de problemas. Es frecuente oír decir a los encargados de asesorar la enseñanza de la Matemática, que hay que continuar desarrollando el pensamiento de los alumnos y realmente no dicen mal, pues la formación y desarrollo del pensamiento es una de las tareas fundamentales de la enseñanza de la Matemática y consideramos que la enseñanza primaria es un magnifico marco para la formación del pensamiento, pues en la mente virgen de nuestros niños, pueden sembrarse ideas de gran provecho para el futuro. Hemos tomado del libro Pensamiento. Análisis y autorregulación de la actividad cognoscitiva de los alumnos, de Alberto Labarrere, la siguiente definición o caracterización de pensamiento: “…es un proceso de búsqueda, de elaboración de hipótesis, emisión de juicios, razonamiento, análisis, síntesis, etc.…”. Ahora especificamos nosotros que ese proceso de búsqueda en Matemática, es de relaciones, de relaciones entre los distintos contenidos de la Matemática que pueden estar dados por conceptos, axiomas, teoremas, figuras, fórmulas, números, funciones, etc. ¿Qué entender por relación? Entre las distintas acepciones que podemos encontrar para este término, tomaremos la que se refiere a conexión o correspondencia de una cosa con otra. Un problema no es un proceso de un solo “paso”, en él se mezclan distintos contenidos que posiblemente han sido adquiridos con anterioridad, incluso el tiempo de adquisición puede ser bastante amplio y llegar a abarcar meses o años. Traerlos a la mente en un momento dado y relacionarlos en busca de un objetivo a vencer, no es una tarea sencilla, sino compleja aunque de primer orden para resolver problemas. A la hora de resolver un problema matemático se habla de razonamiento y ¿qué es razonar? Es un proceso mental por medio del cual relacionamos juicios, llamados premisas para obtener un nuevo juicio llamado conclusión, a la vez un juicio se forma por la unión de dos o más conceptos y los conceptos nacen de las relaciones comunes que se pueden establecer entre diferentes características de un ente determinado. Entonces, llevado al campo de la Matemática, el razonamiento es un proceso de búsqueda de relaciones entre entes matemáticos. Cuando Poya habla de las etapas para resolver problemas, plantea como primera, la comprensión del problema y es precisamente en esa primera e importantísima etapa, donde juega un papel fundamental la búsqueda de relaciones.

El proceso de búsqueda de relaciones no es un privilegio de la Matemática solamente, en todos los actos de la vida está presente la búsqueda de relaciones y por tanto debe ser contemplada por todas las asignaturas del currículo. Un simple hecho como es la visita al extranjero nos hace pensar en el clima que encontraremos en el país a visitar, cuál es su idioma, costumbres, alimentación, sistema político, población, región del planeta donde está ubicado, etc. Estos contenidos los hemos recibido en la escuela, pero si no buscamos la relación entre ellos entonces no tendremos una idea clara del lugar a visitar.

En oportunidades la enseñanza se hace rutinaria debido a que siempre proyectamos la pregunta en la misma forma, es necesario romper la rutina.

Veamos un ejemplo: Es corriente que a un alumno de los primeros grados de primaria se le proponga un ejercicio como el siguiente:

Multiplica:

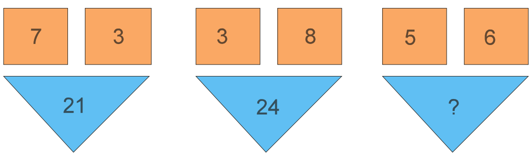
a) $7 \bullet 3$ b) $3 \bullet 8$ c) $5 \bullet 6$.

Oída la orden de multiplicar, el alumno aplicará la regla y obtendrá el resultado deseado.

No dudamos que ejercicios de este tipo contribuyen a que los alumnos consoliden las habilidades formales para la multiplicación de números naturales, pero aquí no hay búsqueda de relaciones, sino cálculos formales que no desarrollan el pensamiento. Veamos otra forma de presentar la situación y que ahora la consideramos un problema, pues es posible que a priori, los alumnos no encuentren la solución deseada. Sólo la búsqueda de relaciones les conducirá a un resultado satisfactorio.

Observando los resultados obtenidos en los dos primeros diagramas, encuentre el número que debe sustituir al signo de interrogación en el tercero.

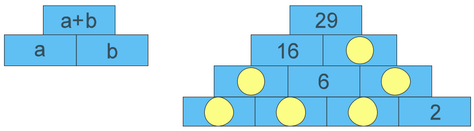
1)



Sin dudas, las operaciones son las mismas que las de la actividad precedente, pero ahora hay menos operaciones y más razonamiento. El descubrir las operaciones que se han realizado y poder ahora hacer la operación que falta le dará satisfacción al alumno y contribuirá al desarrollo de su pensamiento y a la solidez en el aprendizaje. Esta actividad lo va preparando para cuando tenga que enfrentar solo la resolución de un problema.

Otros ejemplos son los siguientes.

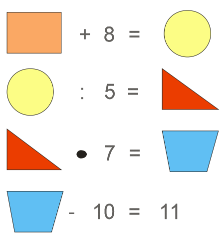
2) La observación del diagrama de la izquierda, te orientará que operaciones debes realizar para completar la pirámide numérica que aparece a la derecha. Complétala.



Puede observarse que la pirámide se completa realizando simples operaciones de sumas (o restas), por tanto, lo importante no es la operación, sino el descubrir que hay que emplear estas operaciones, pues este proceso de búsqueda y descubrimiento de relaciones desarrolla habilidades útiles para enfrentarse a la resolución de cualquier problema.

El siguiente problema contempla un doble objetivo, primero, romper la rutina de que todos los ejercicios o problemas tienen que empezar de arriba hacia abajo, que en ocasiones un análisis previo, necesario en toda actividad matemática, nos dice que en determinadas ocasiones, esto no es lo ideal y segunda, de menos importancia, realizar operaciones elementales

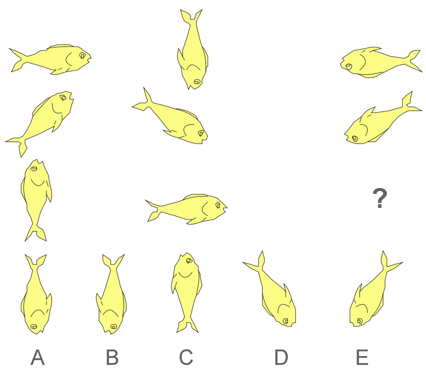
3) Sustituye cada figura geométrica por un número, de manera que no haya contradicción en las operaciones realizadas y que cada figura tenga un único número.



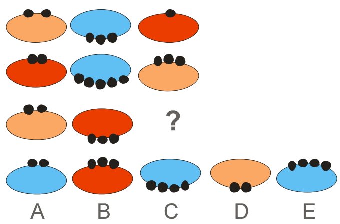
Estas actividades no quedan reducidas en la enseñanza primaria a la búsqueda de relaciones numéricas, ya en el último ejemplo aparecen figuras geométricas que el niño debe conocer.

Veamos ahora dos ejemplos donde las relaciones se buscan teniendo como base figuras geométricas.

4) Los pececitos del diagrama van cambiando de posición de izquierda a derecha en cada línea. Descubra cómo se ha logrado la nueva posición en cada caso y entonces seleccione cuál de los pececitos dados al final debe sustituir al signo de interrogación para conservar la secuencia.



5) ¿Cuál de los óvalos dados al final debe sustituir el signo de interrogación para conservar las relaciones dadas en las dos primeras líneas?.



El objetivo con que se proponen estas situaciones se logra no sólo con elementos matemáticos, sino que podemos incursionar en la lengua materna y otras especialidades, conservando en cada momento, la búsqueda de relaciones como la idea central. El siguiente ejemplo es prueba de ello.

6) La escritura de las palabras dadas tienen una característica común. Descúbrala y entones completa la escritura de la palabra final, de manera que conserve la misma propiedad.

- MU R C I É L A G O.
- C U L T I V A D O R E S.
- E M U L A C I Ó N.
- S I M U L T Á N E O.
- C U R A N D E R I T O.
- N U M E R A C I Ó N.
- R E F U G I A D O S.
- _ D _ C _ C _ _ N.

Después de un proceso de búsqueda de relaciones entre palabras con significados completamente distintos podemos descubrir que la característica común a todas ellas, se debe a que en todas aparecen las cinco vocales y que ninguna de las vocales se repite. Encontrada la característica común, ahora es sencillo darse cuenta que la palabra final a completar es EDUCACIÓN que también tiene cinco vocales sin que se repitan.

La parte conceptual también tiene su presencia en lo programado respecto a la búsqueda de relaciones, pues además de todos los conceptos que son necesarios traer a colación para resolver los problemas que hemos presentado, se formulan preguntas dirigidas a descubrir un concepto puro. Un ejemplo es el siguiente:

Coloque los números que faltan en la siguiente tabla

2	3		5		7				11		13				17		19					
		4		6		8	9	10		12		14	15	16		18		20	21			

Los alumnos tendrán que buscar la relación existente entre los números que aparecen arriba y los que aparecen abajo y descubrir que todos los de arriba son primos y todos los de abajo no lo son. Entonces colocará el 22 abajo, el 23 arriba y el 24 abajo.

Deseamos hacer un comentario respecto a la pregunta anterior y que vale para otras que podamos concebir para este trabajo. Si esta pregunta se plantea cuando se termina de impartir el concepto de número primo y su definición, no tendrá el mismo valor que si se propone en fecha posterior. En el primer momento el alumno lo único que hace es trasladar la definición que acaba de ofrecer el docente a la pregunta que se le formula y ver que se corresponden, si la pregunta se formula en días posteriores a la clase, cuando se está impartiendo otra temática, entonces el estudiante tendrá que detenerse a pensar, a buscar relaciones y descubrir que los números de la parte superior son primos y los de abajo no lo son: en este momento si podemos afirmar que el alumno tienen el concepto de número primo; si la pregunta se corresponde con la clase, prácticamente el profesor le ha dicho lo que tiene que hacer, el alumno descubre poco o nada.

II. Tendencia a la ejecución inmediata en la resolución de problemas. Como evitarla.

Consideramos que uno de los problemas fundamentales que tiene la enseñanza aprendizaje de la Matemática en la actualidad, es la tendencia a la ejecución inmediata, identificando este accionar como la respuesta inmediata a las preguntas que puede formular el docente, sin que medie un proceso de análisis, de razonamiento, entre la pregunta y la respuesta. En oportunidades los alumnos observan o escuchan los elementos que propone la pregunta y operan con ellos por comodidad, por similitud con situaciones precedentes o simplemente aplica los conocimientos que está recibiendo en ese momento, sin analizar si la pregunta formulada está o no relacionada con la información que se ofrece. Podríamos decir que muchos de los alumnos mueven su mente por inercia. Se dejan llevar por la vía más cómoda: actuar sin pensar. ¿Quiénes cargan con la culpa de esta forma de proceder?

Consideramos que ambos, docentes y alumnos tienen parte de culpa, los docentes por no evitar que esto se produzca y los alumnos por proceder por esa vía de tan poco provecho para su desarrollo intelectual. Se ha hablado mucho de cómo debe proceder el docente para evitar que esto se produzca, entre otras cosas, leer el problema con detenimiento, lograr que los alumnos reproduzcan las ideas fundamentales del problema a resolver, etc. Consideramos que todo esto es útil, pero nuestro objetivo en este trabajo llega más lejos y a continuación presentamos algunas ideas que pueden ser útiles.

a) **Presentar problemas que no expresan en forma explícita los contenidos que deben aplicarse en su solución**.

En oportunidades los contenidos que presentamos conspiran para que los alumnos se inclinen a la ejecución inmediata. Estamos explicando el teorema de Pitágoras y al presentar un problema, este comienza diciendo sea ABC un triángulo rectángulo ¿Por qué no dejamos que el alumno descubre que el triángulo es rectángulo, para que le sea posible aplicar el teorema?. Esto es, somos cómplices de esta situación, pues el texto lleva en forma explícita, los contenidos que hay que utilizar para resolverlo. Esto hace que el alumno no se detenga a buscar las relaciones que conducen a las transformaciones necesarias, sino que en forma rutinaria empieza a realizar cálculos sin tener un objetivo bien concebido. El siguiente problema, formulado para la enseñanza primaria, nos permite apreciar la validez de lo expuesto en este epígrafe. Completar el siguiente cuadro colocando los números necesarios:

84 – 48 = 9 x 4

71 - 17 = 9 x __

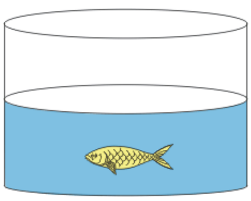
__ - 39 = 9 x 6

61 – __ = 9 x 5

__ - __ = __ x __.

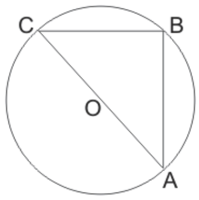
El enunciado del problema no aporta ideas de cómo encontrar los números. El alumno tendrá que detenerse, evitando la tendencia a la ejecución inmediata, y buscar las relaciones entre los números de la primera línea que está completa, para elaborar una hipótesis (que también se elabora buscando relaciones) que le permita continuar trabajando. Puede apreciar que en la sustracción se invierte el orden de las unidades y decenas y ya esto le permitirá llenar todos los espacios vacíos de la parte izquierda de las igualdades. Puede ahora apreciar que el número 9 es fijo y que el segundo factor se obtiene buscando la diferencia entre cualquiera de las dos cifras de los números de la izquierda. La última línea se da para la creación de un ejemplo por parte del alumno, que siga las normas establecidas con anterioridad.

Veamos ahora un ejemplo tomado de la Geometría: En el diagrama siguiente se representa un pececito en una pecera circular. El pececito parte de un borde de la pecera y nada 6 dm directamente al norte hasta chocar con el borde de la piscina y entonces nada 6 dm directamente al oeste hasta chocar nuevamente con el borde de la piscina. ¿Cual es el diámetro del a piscina? (En los cálculos se desprecia la longitud del pececito)



La pregunta, en su relación con el diagrama, lleva a múltiples relaciones:

- Primero habrá que llevarla a un plano y el movimiento del pececito (directamente al norte y después al oeste, nos habla de la presencia de un ángulo recto y si unimos los extremos de los segmentos representados, estaremos en presencia de un triángulo rectángulo. La figura que surge del análisis es la siguiente:



- El teorema de Thales, o mejor su inverso, estará presente también y será el que nos permite afirmar que el segmento que une los extremos de los segmentos, es un diámetro.
- La solución será encontrada mediante la aplicación del teorema de Pitágoras.

Al formularse el problema, ninguna de estas ideas que conducen a la solución están presentes de forma explícita y sólo las búsqueda de relaciones nos conduce al éxito.

b) **Cambiar el estilo de las preguntas**.

Consideramos que en ocasiones es oportuno detenernos para darle una forma distinta a las preguntas que formulamos. Los estudiantes se acostumbran a un estilo de preguntas y cuando se produce un cambio, se sienten perdidos. Es conveniente trabajar este estilo de preguntas para que los alumnos busquen relaciones y no procedan formalmente: Veamos un ejemplo: Cuando se trabaja con números aproximados para obtener cifras exactas, la costumbre es dar varios números para que sean expresado con un número aproximado de cifras exactas: nosotros proponemos la siguiente forma de formular. “La estatura de Rosa, tomada con tres cifras significativas, es de 1,61 metros, ¿Cuál es la menor estatura de Rosa?”. Ahora es fácil comparar la forma tradicional de enseñar con la forma que proponemos; estamos invirtiendo el orden de la pregunta, hemos formulado la pregunta inesperada que detiene a los alumnos, que evita la tendencia a la ejecución inmediata, que los obliga a buscar relaciones, pues el número 1,61 puede haber sido tomado de infinitos valores, pero estamos exigiendo un valor único, el menor. Esto obliga al razonamiento, a mostrar si realmente sabemos trabajar con valores aproximados. El valor 1,605 nos dará la respuesta correcta.

c) **La modelación de problemas**.

Nuestra idea general es que la enseñanza de la Matemática en la escuela, debe desarrollarse a través de problemas desde los primeros años de vida escolar. Estos problemas pueden presentarse modelados para que los alumnos busquen las relaciones necesarias, realizar las transformaciones y lograr la solución; o con un texto de manera que sea el alumno, de forma inmediata o por una investigación sencilla, el que encuentre el modelo matemático que le permita resolverlo. El modelo puede ser sencillo o complejo y esto estará en dependencia del nivel donde se pretende enseñar. Los modelos pueden estar dados por simples figuras, fórmulas, funciones, etc., siempre al alcance del alumno al que se le ha propuesto la tarea. Es lógico pensar que en los niveles superiores habrá mayores conocimientos y por tanto más posibilidades de encontrar el modelo adecuado que conduzca a la situación deseada. En el software que apoya nuestro trabajo, el modelo regularmente está dado y el alumno sólo tiene que descubrirlo. El conocimiento que el alumno aporta, guiados por el docente y apoyados en conocimientos precedentes, será el que perdurará por más tiempo, el que mayor solidez alcanzará. Los modelos para la enseñanza primaria serán sencillos y su complejidad irá alcanzando mayores niveles según se progrese en el nivel de enseñanza y se alcance una mayor madurez mental.

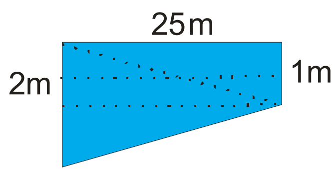
Un modelo para los estudiantes de Secundaria Básica puede ser el siguiente: Determina las potencias de **a** que deben situarse en los distintos cuadraditos para que el producto de las tres potencias situadas en cada fila o en cada columna o en cada diagonal, de siempre como resultados a^{13}-

		a^6
	a^5	

Aquí el modelo está dado y el alumno tendrá que buscar las relaciones para lograr la respuesta que satisfaga las exigencias del problema, en otras oportunidades tendrá que buscar el modelo. Veamos un ejemplo:

"La altura del agua en una piscina, cuando está llena, es de 2 m en la parte profunda y de 1 m en la parte más baja. La pendiente en el fondo es uniforme. Si la piscina tarda 3 horas en llenarse completamente a una presión constante. ¿Qué tiempo tardará en alcanzar el primer metro de altura? ¿Cuál es la máxima altura del agua después de dos horas de llenado?".

En este problema sí habrá que buscar un modelo que nos ayude a interpretar el enunciado del mismo. Una buena idea puede consistir en el trazado de un corte transversal de la piscina, donde se contemplen los distintos datos que ofrece el enunciado. Veamos un intento:



Las líneas de puntos se trazan posteriormente y nos permitirán dividir la parte lateral de la piscina en tres partes, que serán:

a) tres triángulos iguales o

b) un triángulo y dos rectángulos iguales.

De la división en tres triángulos iguales nos daremos cuenta, que si necesita 3 horas para llenar todo el tanque, el primer metro lo alcanzará en una hora y de la división en un triángulo y dos rectángulos iguales, nos daremos cuenta que al cabo de dos horas habrá alcanzado una altura de 1,5 m.

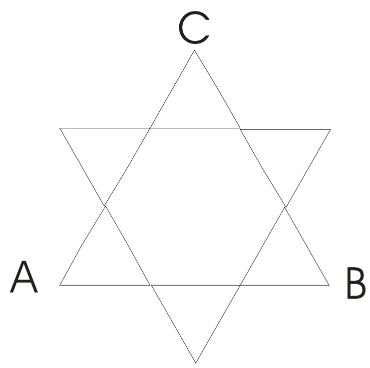
Evidentemente, el modelo geométrico diseñado, nos ha facilitado la búsqueda de las relaciones necesarias para dar solución al problema. Este problema, al igual que el anterior, nos permite comparar nuestro enfoque con las formas tradicionales con que se enseña la Matemática en la escuela primaria, a partir de que el alumno sabe las operaciones básicas, nuestra tarea es descubrirlas a través de la búsqueda de relaciones. Las construcciones auxiliares constituyen una gran ayuda en la búsqueda de relaciones para los problemas.

III. **Descubrimiento o redescubrimiento de contenidos estudiados con anterioridad.**

El aseguramiento del nivel de partida es una preocupación de los maestros y profesores al comenzar el desarrollo de una actividad docente, en particular de una clase práctica o tratamiento de una nueva materia. Normalmente el procedimiento seguido es citar, en forma oral o escrita, los contenidos que se necesitan para comprender el contenido de la nueva materia, proyectar un seminario o para lograr la eficacia en el desarrollo de una clase práctica o práctica de laboratorio. ¿Es esto correcto? Pensamos que no del todo pues si esto es realizado totalmente por el docente, ¿qué queda para el alumno? ¿Dónde está la enseñanza por descubrimiento de que tanto hablamos? Los conocimientos previos para resolver un problema hay que buscarlos y es ahí donde más se presenta la búsqueda de relaciones. Si la actividad se realiza en el aula, el docente tiene el deber de ayudar al alumno mediante una conversación heurística, a que encuentre los conocimientos que le son necesarios para resolver el problema propuesto. Esto en Matemática tiene una mayor incidencia que en otras asignaturas, pues en esta ciencia los conocimientos están muy relacionados y a la hora de resolver un problema, en muchas oportunidades son más los conocimientos precedentes que se emplean que los que se han recibido de inmediato, regularmente cuando se introduce un nuevo concepto o conocimiento, este está en funciones de otros precedentes

Un ejemplo puede contribuir a llevar la idea que deseamos introducir:

En una clase sobre polígonos regulares se presenta la siguiente figura formada por un hexágono regular y seis triángulos equiláteros construidos sobre sus lados con el objetivo de contestar las siguientes preguntas:



a) ¿Qué tanto por ciento representa el perímetro del hexágono, respecto al perímetro de la figura estrellada?

b) ¿Será BC un segmento rectilíneo? Justifique

c) ¿Será ABC un triángulo equilátero? Justifique

Puede apreciarse que las respuestas se pueden lograr sin necesidad de cálculos numéricos con lápiz y papel, sólo se necesitan reflexiones lógicas sencillas.

¿Cuáles son los contenidos matemáticos que se necesitan para dar solución al problema planteado? Veamos:

- Concepto de perímetro.
- Propiedades del triángulo equilátero respecto a sus lados y ángulos.
- Característica de un hexágono regular.
- Valor de la suma de los ángulos interiores de un polígono regular y en particular de un hexágono.

- Valor de la suma de los ángulos consecutivo desde un punto y sobre una recta (propiedad recíproca).
- Cálculo de tanto por ciento.

En una clase práctica es posible que el docente relacione los contenidos que hemos enumerados con anterioridad y que son necesarios para resolver el problema planteado; si lo hace está en un error pues no le deja nada a los alumnos para que descubran y para que piensen, el docente sólo puede ayudar a que los alumnos encuentren estos contenidos, los relacionen con las preguntas que se plantea y encuentren las respuesta a la pregunta o preguntas formuladas. No añadimos que las relacione con los datos porque en definitiva, en este caso, todos los elementos relacionados son consecuencia de los datos o han sido extraídos de ellos.

¿Qué preguntas pueden formularse para ayudar a los alumnos a redescubrir los contenidos necesarios para resolver el problema en todas sus partes?

Esto estará en dependencia de las habilidades o recursos didácticos de los docentes, pero consideramos que valoraciones como las siguientes pueden ayudar mucho a los alumnos.

- ¿Coincide algún lado del triángulo con los del hexágono?
- ¿Son iguales los lados del hexágono? ¿y los del triángulo? ¿son iguales los primeros a los segundos?
- Recorre con el lápiz los lados del hexágono y los lados de la figura estrellada. ¿Qué nombre darías a la suma de esos lados en ambos casos? ¿Cuál consideras tendrá mayor longitud? Establece una razón entre la menor y la mayor. Exprésala en forma de tanto por ciento.
- Señala uno de los ángulos interiores del hexágono ¿Conoces alguna fórmula para calcular su valor? Aplícala y calcula el valor de ese ángulo.¿Son todos iguales? Justifica

- ➢ Para el tipo de triángulo de la figura ¿Cuál es el valor de cada uno de sus ángulos interiores?

- ➢ Puedes determinar un ángulo del triángulo que sea consecutivo con uno de los ángulos interiores del hexágono? ¿Cuál es el valor de la suma de ambos? ¿A qué conclusión llegas respecto a la posición de los lados no comunes de estos ángulos?

- ➢ ¿Son AB, BC y CD segmentos rectilíneos simples?

- ➢ ¿A qué conclusión puedes llegar respecto al triángulo ABC?

Antes de abandonar el ejemplo precedente queremos insistir en dos aspectos que son de suma importancia en el desarrollo de una clase:

✓ Que la ayuda del docente para encontrar los contenidos precedentes constituyen condiciones necesarias para lograr el nuevo conocimiento. Con todos los elementos en la "mano" ya están dadas las condiciones para buscar las relaciones entre ellos y teniendo en cuenta la preguntas o preguntas que se formulan, usar su conocimiento potencial e incursionar en la zona de desarrollo próximo, realizando las transformaciones necesarias para lograr el objetivo cognitivo propuesto.

✓ La comunicación que se facilita entre los alumnos y entre los alumnos y docentes, nos permiten monitorear los conocimientos de los alumnos a fin de dirigir nuestro trabajo futuro; además, como habíamos apuntado anteriormente, nos facilita el desarrollo de la expresión oral y nos proporciona elementos fundamentales para el desarrollo del razonamiento. En resumen diremos que el aseguramiento del nivel de partida es de suma importancia para logar nuevos conocimientos, pero que estos deben ser aportados por los alumnos, bajo la guía del docente. Que la conversación heurística que se establece en busca de estos conocimientos precedentes y su relación con los nuevos a aprender o desarrollar, facilitan el desarrollo de la expresión oral y del razonamiento. Permite el desarrollo del espíritu crítico al valorar distintas soluciones, desarrolla la perseverancia, pues la conversación puede dar nuevos puntos de partida para el logro del objetivo propuesto y contribuye al trabajo solidario, cuando con la ayuda del docente o de los compañeros de aula, se logran soluciones a las cuales no se ha podido llegar en forma individual.

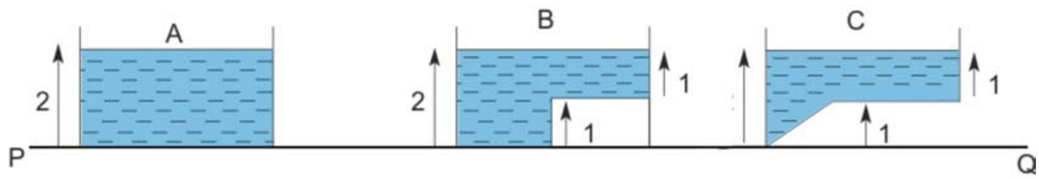
IV. **El desarrollo de la comunicación como parte implícita del trabajo con problemas.**

Una simple lectura a los ejemplos que hemos presentado nos permite apreciar que no han sido los cálculos numéricos los aspectos más importantes y que más aportaron a la solución de los problemas presentados, aunque sí los cálculos mentales, esto es, el razonamiento, la búsqueda de relaciones, la elaboración de hipótesis, el análisis y la síntesis, etc. Todo este proceso debe ser dado a conocer por el alumno en su intercambio en el grupo, o con el profesor que dirige la actividad. Esta actividad realizada en forma sistemática contribuirá al desarrollo de la expresión verbal de los estudiantes y a la realización de valoraciones críticas de las relaciones encontradas. Contribuirá a que los alumnos eliminen el temor a exponer sus ideas; debemos pensar que los alumnos regularmente saben más que lo que dicen, en contraposición al profesor, que regularmente dice más que lo que sabe. La exposición oral de los alumnos además de facilitar lo antes expresado, permite al profesor monitorear la marcha del aprendizaje en los alumnos y tomar medidas oportunas para mejorarlo, si fuera necesario.

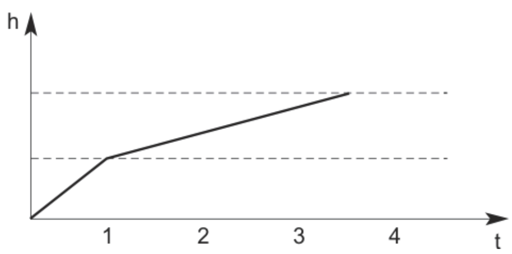
Cuando hablamos de comunicación no nos referimos solamente al intercambio entre dos o más personas, esto es sólo una parte, pues sabemos que existen muchas formas de comunicación

En la actualidad hay muchas formas de llevar el mensaje a los alumnos; oral, videos, escrita, gestos, movimientos, sistema de señales, etc. Una de las formas más importante en los tiempos actuales es la comunicación que los alumnos establecen con los libros en forma independiente pues toda la cultura acumulada por la humanidad no puede llevarse a los alumnos en el espacio del aula, mucho más en la actualidad, donde el volumen de información que se incorpora cada día es realmente impresionante. Por limitaciones de espacio, nos limitaremos en este trabajo a presentar un ejemplo de cómo el profesor puede propiciar una amplia comunicación entre él y los alumnos y entre los integrantes del grupo, sin alejarse de los objetivos de la enseñanza de la Matemática. Veamos el ejemplo:

Los diagramas siguientes representan la sección transversal de tres piscinas, vistas desde un lado. Las tres piscinas tienen el mismo largo y el mismo ancho. En las piscinas B y C, la longitud de la parte baja es la mitad de la longitud de la parte larga. Las piscinas se llenan a una profundidad máxima de 2 metros. Cuando las piscinas B y C están llenas, la parte baja tiene un metro de profundidad. El agua es bombeada en las tres piscinas a una presión constante y se supone que al inicio del llenado, las tres estaban vacías.



El gráfico siguiente muestra la altura sobre la línea PQ contra el tiempo, de una de las piscinas cuando está llena ¿Cuál es?



Adicione el gráfico de las otras dos piscinas en el mismo diagrama.

Como veremos a continuación, el problema, se resuelve sin necesidad de cálculos numéricos, es sumamente rico en conceptos, permite la posibilidad de establecer una amplia comunicación con los alumnos y necesita de una detallada búsqueda de relaciones.

En primer lugar, la lectura cuidadosa es imprescindible para poderse ubicar en el corte transversal de la piscina y en la presión constante del agua, pues el hecho de la presión constante nos da la idea de un crecimiento de la curva proporcional al tiempo y en línea recta. Esto nos hace eliminar la piscina C, pues la forma de esta piscina en su parte más baja, exige la representación con una curva convexa de rápido crecimiento. Entre las piscinas A y B, nos decidimos por la B, pues la recta ha cambiado de pendiente y este fenómeno es lógico en la piscina B ya que el llenado en la parte superior debe ser más lento, pues hay más capacidad de agua.

Respecto al trazado de los gráficos para las piscinas A y C, empezaremos el análisis por la piscina A. Esta debe ser una recta (segmento) que va de extremo a extremos y termina a la derecha del gráfico anterior ya que el tiempo invertido es mayor por ser la de mayor capacidad. Ahora nos detendremos en el gráfico de la piscina C. El primer metro lo ha de alcanzar con mucha rapidez, pues en su parte inferior tiene muy poca capacidad. El gráfico en esta parte debe estar representada por una curva convexa de rápido crecimiento en el primer momento y más lento posteriormente. Después de alcanzado el primer metro de altura, el gráfico debe corresponder a una recta que tendrá su punto final a la izquierda de las otras dos, pues la piscina C es la que menos capacidad tiene y por tanto emplea menos tiempo en llenarse. Nos queda por abordar un detalle de mucho interés y es que los tres gráficos, a partir del primer metro, están representados por segmentos de rectas paralelos y esto está dado porque la capacidad de la piscina a partir del primer metro es la misma para las tres. Esto hace que las “rectas” que representan la altura del agua con respecto al tiempo, sean paralelas ya que tienen la misma inclinación respecto a una recta horizontal imaginaria.

Otos detalles son posibles explotar en la conversación que se establezca, entre estos estará la representación analítica de los gráficos trazados y como todos ellos tendrán el mismo coeficiente para la variable independiente a partir de determinado momento.

Como puede apreciarse, la búsqueda de relaciones y las posibilidades de establecer la comunicación con el alumnado, han sido el objetivo fundamental del problema planteado, que no ha exigido en ningún momento, cálculos numéricos para su realización.

Extraer conocimientos de los libros, de Internet, etc., debe ser tarea priorizada de la comunicación. Enseñar a leer correctamente es la base del éxito para resolver problemas. Cuando en Matemática decimos leer correctamente, no estamos haciendo referencia a que el alumno pueda transformar en palabras las manchas negras, o de otro color que encuentra en las fuentes analizadas, nos referimos a una lectura analítica, queriendo decir con ello que es capaz no sólo de reproducir lo que lee, sino que descubra en su lectura relaciones con otros contenidos ya conocidos, descubrir relaciones entre los datos aportados por la lectura y asociados a las preguntas que puedan formularse, tener una idea clara de lo que se le informa y a lo que se quiere llegar. La labor del docente es fundamental en esta actividad, pues su accionar directo e intercambio con los alumnos, es la única forma de saber si este objetivo se ha logrado.

El buen uso de los signos de puntuación constituye otro factor de la comunicación y que es de gran importancia para la comprensión de los problemas, una coma mal puesta puede cambiarle el sentido a un problema; la entonación adecuada ante un signo de interrogación o admiración le da vida al problema y facilitan significativamente la interpretación del mismo. Encontrar las relaciones adecuadas exige de todos los factores anteriores, cada uno de ellos pone su granito de arena.

V. La incidencia de Tecnologías de punta en el proceso de búsqueda de relaciones en la enseñanza aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos.

Los adelantos de la Ciencia y la Tecnología invaden todas las esferas de la vida y la educación y en particular la enseñanza de la Matemática, no es una excepción. Es fácil darse cuenta que una clase desarrollada en la actualidad no puede tener las mismas característica de las clases desarrolladas cincuenta años atrás y desafortunadamente, es frecuente encontrase con ese fenómeno negativo.

La televisión, el video, computación y la gran gama de software educativos que se producen en diversas partes del mundo, apoyan considerablemente la enseñanza en cualquiera de sus formas. Estos recursos permiten aumentar la capacidad de movimiento, visibilidad y llevar a la clase recursos que con medios tradicionales es completamente imposible de lograr; además, constituyen formas de motivar el trabajo y preparar paralelamente al estudiantado en otros conocimientos que pueden ser muy útiles en cualquier posición que le toque desempeñarse en su vida laboral futura.

Nuestro curso no se ha olvidado de ello e incluye un software educativo interactivo de fácil manejo para los alumnos y en los que aparecen muchas actividades de Matemática elemental propuesta de manera que sea la búsqueda de relaciones el objetivo principal.

Las preguntas se muestran sobre una pizarra y según el tema que se trate tiene varias formas de responderse; si la pregunta es de selección, arrástrela con el "mouse" hasta el lugar considerado adecuado (si la selección realizada por usted es errónea, el elemento arrastrado vuelve a su posición inicial); en otras ocasiones se teclea en el espacio considerado la respuesta considerada correcta y se usa la tecla TAB o el "mouse" para moverse de una casilla a otra. También es posible encontrar preguntas que solo necesitan dar clic sobre la acción considerada correcta. Después que usted haya realizado la acción correspondiente, debe presionar aceptar (ENTER) para comprobar si su respuesta es la adecuada (si es que no se ejecuta automáticamente después de la acción). De inmediato saldrá de la parte inferior derecha un muñequito (la mascota del software, el cual, si la respuesta es acertada le dirá entusiasmado ¡Ganaste! ¡Bravo! La expresión estará acompañada con emisiones sonoras como premio al éxito. Si la respuesta es incorrecta, emitirá un sonido de inconformidad y le dirá que le ofrece una nueva oportunidad. En la pizarra se borrará de inmediato la respuesta equivocada y las condiciones quedarán dispuestas para su nueva selección. Si en esta segunda oportunidad, la respuesta es correcta, se producirá el mismo efecto descrito con anterioridad para las respuestas acertadas, pero si vuelve a ser incorrecta, entonces el muñequito se reirá con una risa burlona y no ofrecerá una nueva oportunidad para así evitar que se llegara a la respuesta correcta por ensayo y errores. Si la respuesta admite sólo dos posibilidades, sólo se dará una sola oportunidad. En la parte superior de la pantalla aparece un espacio para ir evaluando automáticamente las respuestas en correctas e incorrectas.

Cada CD está acompañado de un manual de instrucciones y sugerencias para lograr responder acertadamente todas las preguntas formuladas.

BIBLIOGRAFÍA

1. Butter Eamomn and Pierre Madsen (1990). Boost your IQ. Pan Books Ltd. London.

2. Colectivo de autores (2001). Psicología. Una perspectiva científica. Colección de letras y humanidades. Lumbreras. Editores S. R. L. Lima, Perú.

3. Labarrere. A. (1996). Pensamiento. Análisis y autorregulación de la actividad cognoscitiva de los alumnos. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana.

4. Ministerio de Educación Nacional (1998). Matemáticas. Lineamientos curriculares. Áreas obligatorias y fundamentales. Colombia.

5. National Council of teachers of Matematics (1992). Estándares curriculares y de evaluación para la Educación Matemática. Edición en castellano. Sociedad Andaluza de Educación Matemática “Thales”. Sevilla, España

6. Palacio, J. (2003) Didáctica de la Matemática. Búsqueda de relaciones y contextualización de problemas. Fondo Editorial del Pedagógico San Marcos. Lima, Perú.

7. Palacio, J. (2003). Colección de problemas Matemáticos para la vida. Editorial Pueblo y Educación. Habana, Cuba.

8. Palacio, J (2004) Ideas innovadoras en la enseñanza primaria. Evento Internacional. Camaguey, Cuba

9. Perero, Mariano (1994) Historia e Historias de Matemáticas. Grupo Editorial Latinoamericano. México.

10. Polya(s/f). ¿Cómo plantear y resolver problemas?. Editorial Trilla. México.

11. Talizina, N (1988). Psicología de la Enseñanza. Editorial Progreso. Moscú.

12. University of Cambridge (1996). Local examination and publishers Pte Ltd “O level additional mathematics”. B Ramajooloo and Co. Ltd. Mauritius.

ISBN 959-18-0103-3
9 789591 801036